МАТЕМАТИКА 4

Памятка по ключевым вопросам теории для подготовки к экзамену

1. Определение функции двух переменных.

Функцией двух вещественных переменных x и y называется правило, по которому каждой паре чисел (x, y) ставится в соответствие единственное вещественное число z. Это правило (соответствие) обозначают: $z = f(x, y)$.

2. Определение частных производных функции двух переменных.

Частной производной функции $z = f(x, y)$ ***по*** x называется предел отношения частного приращения $\Delta_x z$ функции по x к приращению аргумента Δx, когда Δx стремится к нулю, т.е.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Частной производной функции $z = f(x, y)$ ***по*** y называется предел отношения частного приращения $\Delta_y z$ функции по y к приращению аргумента Δy, когда Δy стремится к нулю, т.е.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

3. Формула производной сложной функции

Пусть $z = f(x, y)$ — дифференцируемая в точке (x_0, y_0) функция двух переменных x и y, каждая из которых является дифференцируемой функцией независимой переменной u, то есть $x = x(u)$, $y = y(u)$. Тогда производная функции $z = f(x(u), y(u))$ в точке u_0 (такой, что $x_0 = x(u_0),\ y_0 = y(u_0)$) существует и вычисляется по формуле:

$$\frac{dz}{du} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{du} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{du}.$$

4. Уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности, заданной уравнением $F(x, y, z) = 0$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$ - уравнение ***касательной плоскости***;

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}$$

— уравнение ***нормали***.

5. Определение точек минимума и максимума функции двух переменных.

Точка $M_0(x_0, y_0)$ называется ***точкой максимума*** функции $f(x, y)$, если найдется такая окрестность точки M_0, что для любых точек $M(x, y)$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x, y) < f(x_0, y_0)$.

Точка $M_0(x_0, y_0)$ называется ***точкой минимума*** функции $f(x, y)$, если найдется такая окрестность точки M_0, что для любых точек $M(x, y)$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x, y) > f(x_0, y_0)$.

6. Необходимые и достаточные условия экстремума функции двух переменных.

Необх. усл. Если функция $f(x, y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$ и имеет в этой точке экстремум (максимум или минимум), то

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \end{cases}.$$

Точка, в которой все частные производные функции равны нулю, называется **стационарной точкой** функции.

Дост. усл. Если $M_0(x_0, y_0)$ - **стационарная точка** дважды дифференцируемой функции $f(x, y)$ и если $A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$, $C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$, $B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$, то функция имеет экстремум, если $AC - B^2 > 0$ и не имеет экстремума, если $AC - B^2 < 0$. При этом экстремум — максимум, если $A < 0$ и минимум, если $A > 0$.

7. Задача Коши для дифференциального уравнения.

Задача Коши с начальными данными $x_0, y_0, y_1, \ldots y_{n-1}$ для дифференциального уравнения $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ состоит в нахождении такого решения $\varphi(x)$ дифференциального уравнения, которое удовлетворяет равенствам:

$$\varphi(x_0) = y_0,\ \varphi'(x_0) = y_1, \ldots, \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$$

8. Теорема существования и единственности решения задачи Коши

Рассмотрим уравнение:

$$y' = f(x, y).$$

Пусть в некоторой области D плоскости XOY функции $f(x, y)$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны. Тогда для любой точки $(x_0, y_0) \in D$ решение задачи Коши с начальными данными (x_0, y_0) существует и единственно.

9. Определение общего решения дифференциального уравнения.

Общим решением дифференциального уравнения n-го порядка называется функция $\varphi(x, C_1, \ldots, C_n)$, удовлетворяющая двум условиям:

1) При любом наборе значений постоянных $C_1,\ldots,C_n$ функция $\varphi(x,C_1,\ldots,C_n)$ является решением дифференциального уравнения.

2) При любом наборе начальных данных $x_0, y_0, y_1, \ldots y_{n-1}$ задачи Коши (взятом из области существования и единственности задачи Коши) можно подобрать такие значения постоянных, что при их подстановке в $\varphi(x,C_1,\ldots,C_n)$ получится решение задачи Коши с этими начальными данными.

10. Определение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.

Дифференциальным уравнением с ***разделяющимися переменными*** называется уравнение, которое можно преобразовать к виду

$$f(x)\,dx = g(y)\,dy.$$

11. Определение однородного дифференциального уравнения первого порядка (включая определение однородной функции).

Функция $f(x,y)$ называется ***однородной функцией*** n***-ой степени*** относительно переменных x и y, если выполняется равенство $f(tx,ty) \equiv t^n f(x,y)$ при $t \neq 0$.

Дифференциальное уравнение, которое можно преобразовать к виду

$$y' = f(x,y)$$

называется ***однородным***, если функция $f(x,y)$ – однородная функция *нулевой степени*.

12. Определение линейного дифференциального уравнения 1-го порядка.

Линейным дифференциальным уравнением 1-ого порядка называется уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x).$$

13. Определение дифференциального уравнения Бернулли.

Дифференциальным уравнением Бернулли называется уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x)y^n, \text{ где } n \neq 0, n \neq 1.$$

14. Определение уравнения в полных дифференциалах.

Дифференциальное уравнение

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

называется уравнением ***в полных дифференциалах***, если его левая часть является полным дифференциалом некоторой функции двух переменных $u(x,y)$, то есть левая часть уравнения представима в виде

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = du(x,y).$$

Для того чтобы уравнение было уравнением в полных дифференциалах, необходимо и достаточно выполнение следующего условия

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}.$$

15. Определение линейного однородного дифференциального уравнения *n*-го порядка.

Линейным однородным дифференциальным уравнением n***-ого порядка*** (ЛОДУ(n)) называется уравнение вида

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = 0,$$

где $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x)$ - функции, непрерывные на промежутке $[a,b]$; и $\forall x \in [a,b] : a_0(x) \neq 0$.

16. Определение линейного неоднородного дифференциального уравнения *n*-го порядка.

Линейным неоднородным дифференциальным уравнением n***-ого порядка*** (ЛНДУ(n)) называется уравнение вида

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = f(x),$$

где $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x)$ и $f(x)$ — непрерывные функции на промежутке $[a,b]$; причем $a_0(x) \neq 0$ для любого $x \in [a,b]$ и $f(x)$ тождественно не равна нулю на $[a,b]$.

17. Структура общего решения линейного однородного дифференциального уравнения *n*-го порядка.

Пусть $y_1, \ldots y_n$ фундаментальная система решений ЛОДУ(n). Тогда общее решение ЛОДУ(n) имеет вид:

$$y_{общодн} = C_1 y_1 + \ldots + C_n y_n$$

18. Структура общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения *n*-го порядка.

Общее решение ЛНДУ(n) является суммой общего решения $y_{общодн}$ ЛОДУ(n) и частного решения y_* ЛНДУ(n):

$$y_{общнеодн} = y_{общодн} + y_*.$$

19. Определение двойного интеграла.

Пусть в замкнутой области D задана непрерывная функция $z = f(x,y)$. Разобьем область D на n частей D_i. В каждой части D_i выберем точку M_i. Пусть d_i — наибольшее расстояние между точками части D_i, пусть $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} d_i$.

Предел

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i) S_i,$$

(где S_i — площадь части D_i), если он существует и не зависит от разбиения области D и выбора точек M_i, называется двойным интегралом от функции $f(x,y)$ по области D.